

Примена пропорција

Две величине x и y су **директно пропорционалне** уколико важи:

Ако се x увећа неколико пута, онда се и y увећа исти тај број пута.

Ако се x умањи неколико пута, онда се и y умањи исти тај број пута.

Две величине x и y су **обрнуто пропорционалне** уколико важи:

Ако се x повећа неколико пута, онда се y умањи исти број пута.

Ако се x умањи неколико пута, онда се y увећа исти број пута.

Приликом решавања задатака који се односе на пропорционалне величине треба следити следећи поступак:

- 1.Формирамо табелу од датих података и непознате величине тако да у колонама буду уписане вредности величина које су исте врсте.
- 2.Одређујемо да ли су величине на које се односи задатак директно или обрнуто пропорционалне.
3. Уочену пропорционалност у табели означавамо стрелицама. За директно пропорционалне величине обе стрелице цртамо у истом смеру, а за обрнуто пропорционалне у супротном смеру. Стрелице показују начин на који треба формирати пропорцију.
4. Затим треба саставити одговарајућу пропорцију.
5. Треба одредити непознати члан те пропорције.

Примери за директно пропорционалне величине

Пример 1.

За 6 сати вожње сталном брзином, аутомобил пређе 480 km. Колико ће километара прећи за 10 сати вожње?

- 1.Формирамо табелу.

Сати вожње Пређени километри

	6 сати 10 сати	480 km x	
--	-------------------	---------------	--

- 2.Величине су директно пропорционалне.

- 3.Зато обе стрелице имају исти смер.

↑	6 сати 10 сати	480 km x	↑
---	-------------------	---------------	---

4. Састављамо одговарајућу пропорцију:

$$10 : 6 = x : 480$$

$$480 \cdot 10 = 6x \quad \leftarrow \text{Производ спољашњих чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова.}$$

$$x = \frac{480 \cdot 10}{6}$$

$$x = 800$$

Аутомобил ће за 10 сати вожње прећи 800 km.

Пример 2.

Од 4 kg брашна добија се 5kg хлеба. Колико је потребно брашна за 150 kg хлеба?

Брашно Хлеб

↑	4 kg x	5 kg 150 kg	↑
---	-----------	----------------	---

Величине су директно пропорционалне. Од више брашна добићемо више хлеба.

$$x : 4 = 150 : 5$$

$5x = 4 \cdot 150$ ← Производ спољашњих чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова.

$$x = \frac{4 \cdot 150}{5}$$

$x = 120$ За 150 kg хлеба потребно је 120 kg брашна.

Пример 3.

На аутокарти означено је да је нацртана у размери 1 : 500 000. Душан је измерио лењиром: на аутокарти од Лознице до Шапца је 106 mm. Колико је километара од Лознице до Шапца?

mm на карти mm у природи

↑	1 mm 106 mm	500 000 mm x mm	↑
---	----------------	--------------------	---

Величине су директно пропорционалне. (Више mm у природи представља више mm на карти).

$$106 : 1 = x : 500\,000$$

$1 \cdot x = 106 \cdot 500\,000$ ← Производ спољашњих чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова.

$$x = \frac{106 \cdot 500\,000}{1}$$

$x = 53\,000\,000 \text{ mm} = 53 \text{ km}$ Од Лознице до Шапца има 53 km.

Пример 4.

Књига чија је цена била 520 динара, појефтинила је за 20 %. Колика је нова цена књиге?

Ако је књига појефтинила за 20%, значи да је нова цена x књиге 80% од старе цене.

динари %

↑	520 x	100 80	↑
---	----------	-----------	---

$$x : 520 = 80 : 100$$

$$x \cdot 100 = 520 \cdot 80$$

$$x = \frac{520 \cdot 80}{100}$$

$$x = 416$$

Нова цена књиге је 416 динара.

Примери за обрнуто пропорционалне величине

Пример 5.

Четворица молера обоје фасаду зграде за 12 дана. За колико би дана 6 молера обојило фасаду?

Решење:

Шесторица молера обојиће фасаду зграде за мањи број дана него четворица. Број молера и број дана потребних да се обави исти посао јесу обрнуто пропорционалне величине, па су стрелице супротно усмерене.

Број молера Број дана

↑	4 6	12 x	↓
---	--------	---------	---

$$6 : 4 = 12 : x$$

$$6x = 4 \cdot 12$$

$$x = \frac{4 \cdot 12}{6}$$

$$x = 8 \qquad \text{Шесторица молера обојиће фасаду за 8 дана.}$$

Пример 6.

Базен се напуни водом из 6 једнаких цеви за 21 сат. Колико ће таквих цеви напунити базен за 14 сата?

Решење:

Ако смањимо време пуњења базена, морамо повећати број цеви, што значи да су ове две величине обрнуто пропорционалне и стрелице су супротно усмерене.

Број молера Број дана

↑	4 6	12 x	↓
---	--------	---------	---

$$6 : 4 = 12 : x$$

$$6x = 4 \cdot 12$$

$$x = \frac{4 \cdot 12}{6}$$

$$x = 8$$

Шесторица молера обојиће фасаду за 8 дана.

Продужена пропорција

Једнакост размера, када их је више од две, називамо **продужена пропорција**. Продужена пропорција коју образују три размере је облика

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

Често се записује и у следећем облику $a : c : p = b : d : q$. У овом запису, две тачке не означавају дељење, већ само служе да раздвоје „горње“, односно „доње“ чланове продужене пропорције.

Пример 7.

Странице троугла су у односу $2 : 3 : 4$. Одреди странице овог троугла ако је његов обим једнак 27 см.

Ако су a, b, c странице троугла, онда је $a : b : c = 2 : 3 : 4$ и $a + b + c = 27$.

Једнакост $a : b : c = 2 : 3 : 4$ означава да је

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$. Ако са k означимо коефицијент дате пропорционалности, добићемо једнакости:

$$\frac{a}{2} = k \quad \Rightarrow \quad a = 2k$$

$$\frac{b}{3} = k \quad \Rightarrow \quad b = 3k$$

$$\frac{c}{4} = k \quad \Rightarrow \quad c = 4k$$

Из ове три једнакости и $a + b + c = 27$ добијамо k .

$$a + b + c = 27$$

$$2k + 3k + 4k = 27$$

$$9k = 27 \quad /: 9$$

$$k = \frac{27}{9}$$

$$k = 3$$

Сада је једноставно одредити странице:

$$a = 2k = 2 \cdot 3 = 6$$

$$b = 3k = 3 \cdot 3 = 9$$

$$c = 4k = 4 \cdot 3 = 12$$

Пример 8.

Израчунај углове у троуглу ако се односе као $5 : 6 : 7$.

α, β, γ су углови у троуглу. Збир унутрашњих углова у троуглу је 180° .

$$\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{5} = k \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5k$$

$$\frac{\beta}{6} = k \quad \Rightarrow \quad \beta = 6k$$

$$\frac{\gamma}{7} = k \quad \Rightarrow \quad \gamma = 7k$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 5k = 5 \cdot 10 = 50^\circ$$

$$5k + 6k + 7k = 180^\circ$$

$$\beta = 6k = 6 \cdot 10 = 60^\circ$$

$$18k = 180^\circ \quad /: 18$$

$$\gamma = 7k = 7 \cdot 10 = 70^\circ$$

$$k = 10$$

Пример 9.

Подели 3600 динара на три особе тако да суме које ће оне добити буду у односу 1 : 2 : 3.

Решење:

Са x обележимо део суме који ће добити прва особа, са y део суме који ће добити друга особа, а са z део суме који ће добити трећа особа.

$$x + y + z = 3660 \quad \leftarrow \text{ збир њихових сума износи 3660 динара}$$

$$x : y : z = 1 : 2 : 3 \quad \leftarrow \text{ однос њихових сума је 1 : 2 : 3}$$

$$\frac{x}{1} = k \quad \Rightarrow x = k$$

$$\frac{y}{2} = k \quad \Rightarrow y = 2k$$

$$\frac{z}{3} = k \quad \Rightarrow z = 3k$$

$$x + y + z = 3660$$

$$k + 2k + 3k = 3660$$

$$6k = 3660 \quad /: 6$$

$$k = 610$$

$x = k = 610$ Прва особа је добила 610 динара.

$y = 2k = 2 \cdot 610 = 1220$ Друга особа је добила 1220 динара.

$z = 3k = 3 \cdot 610 = 1830$ Трећа особа је добила 1830 динара.

Пример 10.

Катете правоуглог троугла односе се као 3 : 4. Ако је дужина хипотенузе 90 cm, израчунај обим и површину троугла.

Решење:

a, b – катете правоуглог троугла

$$a : b = 3 : 4$$

$$\frac{a}{3} = k \quad \Rightarrow a = 3k = 3 \cdot 18 = 54 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{4} = k \quad \Rightarrow b = 4k = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}$$

$$O = a + b + c = 54 \text{ cm} + 72 \text{ cm} + 90 \text{ cm} = 216 \text{ cm}$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{54 \text{ cm} \cdot 72 \text{ cm}}{2} = 1944 \text{ cm}^2$$

Да бисмо израчунали обим правоуглог троугла, примењујемо Питагорину теорему.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 90^2$$

$$9k^2 + 16k^2 = 8100 \text{ cm}^2$$

$$25k^2 = 8100 \text{ cm}^2 \quad /: 25$$

$$k = \sqrt{324 \text{ cm}^2}$$

$$k = 18$$